## Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Уравнения в частных производных первого порядка рассматриваются вместе с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. построение общего решения этих уравнений базируется на задаче Коши для обыкновенных уравнений. Уравнения в частных производных возникают при изучении функции многих переменных.

Пусть нам дана функция многих переменных $U(\overline{x}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее непрерывные частные производные $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ ; $i \in \overline{1,n}$ .

**Определение 1** Выражение вида $F(x_1, \ldots, x_n, U, \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_n}) = 0$ называется ***уравнением в частных производных первого порядка.***

**Определение 2** ***Линейным уравнением в частных производных*** называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \overline{x} \in R_n, \qquad (1)$$

коэффициенты которого $a_i(\overline{x})$ при $\overline{x} \in G \in R_n$ - непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные.

**Определение 3** ***Неоднородным линейным уравнением в частных производных первого порядка*** называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = a_{n+1}(\overline{x}). \qquad (2)$$

**Определение 4** ***Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка*** называется уравнение (2) , коэффициенты и правая часть которого зависят от искомой функции $U(\overline{x})$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U) \frac{\partial U(\overline{x})}{\partial x_i} = a_{n+1}(\overline{x},U). \qquad (3)$$

Отметим, что неоднородное линейное уравнений (2)является частным случаем квазилинейного уравнения (3). Поэтому мы исследуем линейное и квазилинейное уравнения в частных производных первого порядка. Рассмотрим вначале линейное уравнение (1).

Заметим, что, введя векторы

$$\overline{a}(\overline{x}) = (a_1(\overline{x}),\dots,a_n(\overline{x})) \text{ и } gradU = (\frac{\partial U}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial U}{\partial x_n}),$$

мы можем записать уравнение (27.1) в виде скалярного произведения

$$\overline{a}(\overline{x}) \bullet gradU = 0. \qquad (4)$$

Это означает, что направление вектора $\overline{a}(\overline{x})$ ортогонально к $gradU$ . Так как $gradU$ направлен в сторону максимального изменения функции *U(x)* , то вектор $\overline{a}(\overline{x})$ имеет направление сохранения значения функции *U(x)*.

**Определение 5.** ***Характеристиками уравнения*** (1) называются интегральные кривые системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(\bar{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\bar{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\bar{x})}. \qquad (5)$$

Отметим, что система (5) означает, что вектора $d\bar{x}$ и $\bar{a}(\bar{x})$ коллинеарны. Это говорит о том, что $d\bar{x}$ имеет направление в сторону сохранения значения *U(x)*. Пусть характеристики заданы параметрически

$$x_i = x_i(t), \quad i \in [1, n].$$

Тогда из (5) имеем задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = a_i(\bar{x}), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ x_i(t = t_0) = x_i^0, \; i \in [1, n-1]. \end{cases} \qquad (6)$$

Т.к. $\bar{a}_i(x)$ имеет непрерывные частные производные, то выполняются условия существования и единственности задачи Коши. Это означает, что через любую точку $\bar{x}^0$ проходит характеристика, и притом единственная.

***Т е о р е м а*** **1. Вдоль характеристики решение $U(\bar{x})$ сохраняет постоянное значение.**

***Д о к а з а т е л ь с т в о.***

Если $x_i(t) = x_i$ параметрическое задание характеристики, то

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} a_i = 0$$

(согласно уравнению (1)).

Следовательно, $\dfrac{dU}{dt} = 0$ вдоль характеристики, откуда следует, что $U = const$ вдоль характеристики.

*Теорема доказана.*

**Определение 6 Первым интегралом уравнения** (1) называется функция $\varphi\,(x_1,\dots,x_n)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда $M(x_1,\dots,x_n)$ движется вдоль характеристики.

Возникает вопрос, как определить первые интегралы. Для этого исключим из системы уравнений (6) переменную $t$, т.е. перейдем в фазовое пространство. Пусть $a_n(\overline{x}) \neq 0$. Тогда получим систему, в которой $x_n$ является независимой переменной:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(\overline{x})}{a_n(\overline{x})}\quad, \quad i \in [1, n-1], \tag{7}$$

начальные данные $\left. x_i \right|_{x_n = x_n^0} = x_i^0, \quad i \in \ 1, n-1$ .

Решение системы (7) можно записать в виде

$$x_i = X_i(x_n, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad i \in [1, n-1] \ . \tag{8}$$

Функции $X_i$ сопоставляют точки $x_i$ и $x_i^0$ Эти точки можно поменять местами, т.е.записать

$$x_i^0 = X_i(x_n^0, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i \in [1, n-1], \tag{9}$$

Функции $X_i(x_n^0, \overline{x}), i \in \ 1, n-1$ представляют собой *(n-1)* первые интегралы уравнений (1). Это легко доказать, т.к. если точка с координатами $\overline{x}$ принадлежит некоторой характеристике, то, согласно (9).

$$\left. X_i(x_n^0, \overline{x}) \right|_{\text{харак.}} = x_i^0 = \text{const}, \quad i \in \ 1, n-1$$

Взаимная обратимость функций, согласно (8) и (9) означает неравенство нулю якобиана:

$$\frac{D(X_1,\ldots,X_{n-1})}{D(x_1,\ldots x_{n-1})} \neq 0 \quad \text{при } M \in G.$$

Это означает, что $X_1,\ldots,X_{n-1}$ являются функционально независимыми первыми интегралами. С другой стороны, $\varphi_i(\overline{x}) = X_i(x_n^0,\overline{x})$ являются линейно независимыми решениями уравнения (7),. записанными в неявном виде:

$$\varphi_i(\overline{x}) = X_i(\overline{x}) = C_i = const, \; i \in [1,n]. \quad (10)$$

Рассмотрим в качестве примера определение характеристик и первого интеграла для линейного уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (11)$$

Уравнение для характеристик имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

которое имеет решение $x^2 + y^2 = R^2$.Это уравнение характеристик, представляющих собой окружность с центром в начале координат. Первым интегралом является функция $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$, которая обращается в константу на характеристиках.

Для определения общего решения уравнения (1). докажем следующее утверждение.

***Т е о р е м а*** **2. Всякое решение $\Psi(\bar{x})$ уравнения (1) является первым интегралом системы (7) и, обратно, всякий первый интеграл системы (7) . $\varphi(\bar{x})$ является решением уравнения (1).**

***Д о к а з а т е л ь с т в о.***

1. Пусть $\Psi(\bar{x}) = U(\bar{x})$ - решение уравнения (1). Тогда, согласно теореме 1, $U(\bar{x}) = const$ на характеристике. Следовательно, $\Psi(\bar{x}) = U(\bar{x}) = const$ на характеристике, т.е. $\Psi(\bar{x})$ - первый интеграл.

2. Пусть $\varphi(\bar{x})$ - первый интеграл. Это означает, что $\varphi = const$ на характеристике. Если $x_i = x_i(t),\ i \in [1, n]$ уравнение характеристике в параметрическом виде, то для любого $\varphi(\bar{x}(t))$ имеем $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ на характеристике. Тогда имеем уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (1) на характеристике. Однако, характеристика проходит через любую точку области $G$, следовательно, $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (1) во всей области $G$. Это означает, что $\varphi(\bar{x})$ - решение уравнения (1).

***Следствие.*** Произвольная функция от первых интегралов $F(\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\bar{x}))$, имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i},\ i \in [1, n-1]$ , является решением уравнения (1).

*Д о к а з а т е л ь с т в о* следует из того, что функция от первых интегралов есть первый интеграл, а, следовательно, согласно теореме 2, является решением линейного уравнения в частных производных первого порядка (1). Таким образом, общее решение (1) определяется с точностью до произвольной функции от первых интегралов.

***Задачей Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка*** называется задача, в которой имеется дополнительное условие, позволяющее однозначно определить решение. Для наглядности рассмотрим вначале постановку задачи Коши и метод ее решения для двумерного случая. Задача Коши в этом случае ставится следующим образом:

Найти непрерывную функцию $U(x,y)$, имеющую непрерывные частные производные, удовлетворяющую уравнению

$$a_1(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}=0 \tag{12}$$

и начальному условию

$$U(x,y)\big|_{\gamma}=\omega(s), \tag{3}$$

где

$$\gamma=\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$$ - кривая, не совпадающая с характеристикой ни на одном интервале положительной длины, а $\omega(s)$ - заданная функция.

Рассмотрим метод решения поставленной задачи. Пусть нам известен $\varphi(x,y)$ - первый интеграл уравнения (12).

Рассмотрим зависимость от $s$ первого интеграла на кривой $\gamma$:

$$\varphi(x,y)\big|_{\gamma} = \varphi(x(s), y(s)) = \xi(s).$$

Обратим функцию $\xi(s) = \xi$ и получим $s = \Omega(\xi)$.

Тогда имеем

$$\Omega(\varphi(x,y))\big|_{\gamma} = \Omega(\xi(s)) = s.$$

Следовательно, решение $U(x,y)$ представимо в виде

$$U(x,y) = \omega(\Omega(\varphi(x,y))). \qquad (14)$$

Оно удовлетворяет уравнению (12), т.к. является функцией от $\varphi(x,y)$ - первого интеграла. Выражение (14) удовлетворяет начальному условию (13), т.к.

$$U(x,y)\big|_{\gamma} = \omega(\Omega(\varphi(x,y)))\big|_{\gamma} = \omega(\Omega(\varphi(x,y)\big|_{\gamma})) = \omega(s).$$

Для примера рассмотрим решение задачи Коши для уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

При начальном условии $u(x,y) = x^4$ на прямой $y = 0$.

Мы нашли ранее первый интеграл для этого уравнения

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, общее решение представимо в виде $u(x,y) = F(x^2 + y^2)$. Подставим это решение в начальное условие

$$F(x^2 + y^2)\big|_{y=0} = F(x^2) = x^4.$$

Следовательно, $F(t) = t^2$, и решение имеет вид

$$u(x,y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Рассмотрим теперь решение задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка в многомерном случае, когда решение $U(\overline{x})$ зависит от $n$ переменных $\overline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. В этом случае решение уравнения (27.1) должно удовлетворять условию Коши

$$U\Big|_{\gamma_{n-1}}=\omega(\overline{s}),\ \overline{s}=(s_1,s_2,\dots,s_{n-1}), \qquad (5)$$

где $\gamma_{n-1}$ - многообразие ($n$-1)-го измерений, заданное параметрически в виде:

$$x_i=x_i(\overline{s}),\ \ i\in[1,n]. \qquad (6)$$

Согласно следствию теоремы 2, решение уравнения (1) равно произвольной функции от ($n$-1)-го первых интегралов

$$U(\overline{x})=F(\varphi_1(\overline{x}),\dots,\varphi_{n-1}(\overline{x})), \qquad (.7)$$

где $\varphi_i(\overline{x}),\ i\in[1,n-1]$ - функционально независимые первые интегралы уравнения (1). Введем обозначения

$$\varphi_i(x_1=x_1(\overline{s}),\dots,x_n(\overline{s}))=\xi_i,\ \ i\in[1,n-1]. \qquad (18)$$

Разрешив систему (27.18) относительно $\overline{s}$, получим:

$$s_i=\Omega_i(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1}),\ \ i\in[1,n-1] \qquad (19)$$

Тогда решение задачи Коши будет равно:

$$U(\overline{x})=\omega(\Omega_1(\varphi_1(\overline{x}),\dots,\varphi_{n-1}(\overline{x})),\\ \dots,\Omega_{n-1}(\varphi_1(\overline{x}),\dots,\varphi_{n-1}(\overline{x})). \qquad (20)$$

**Квазилинейные уравнения для частных производных первого порядка.**

Мы рассмотрели решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка (1).

Рассмотрим теперь более общий вид уравнения (3). Решение квазилинейного уравнения (3) сводится к решению линейного уравнения для функции $V(x,U)$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial V}{\partial x_i}+a_{n+1}(\overline{x},U)\frac{\partial V}{\partial U}=0. \qquad (21)$$

Решение уравнения вида (21) было рассмотрено выше.

Если мы нашли решение уравнения (21) $V=V(\overline{x},U)$, то из условия $V(\overline{x},U)=0$ можно

определить $U=\varphi(\overline{x})$, если $\left.\frac{\partial V}{\partial U}\right|_{U=\varphi(x)}\neq 0$. Полученное

$U=\varphi(\overline{x})$ является решением квазилинейного

уравнения (3). Докажем это.

***Теорема* 3. Если $V=V(\overline{x},U)$ - решение уравнения (21), то выражение $V(\overline{x},U)=0$ определяет функцию $U=\varphi(\overline{x})$, которая при выполнении условия $\left.\frac{\partial V}{\partial U}\right|_{U=\varphi(x)}\neq 0$ является решением уравнения (3).**

***Д о к а з а т е л ь с т в о.***
Согласно теореме о дифференцировании неявной функции, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial U}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial x_i} = -\frac{1}{\dfrac{\partial V}{\partial U}}\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Используя уравнение для $V(\overline{x},U)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{1}{\dfrac{\partial V}{\partial U}}\bullet\left(-a_{n+1}\bullet\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = a_{n+1}.$$

Таким образом, получили, что $U = \varphi(\overline{x})$ удовлетворяет уравнению (3).

*Теорема доказана.*

Теорема 3. показывает, что для решения квазилинейного уравнения (3) достаточно решить линейное уравнение (21). Для линейного уравнения (21) мы имеем $n$ первых интегралов

$\varphi_i(\overline{x},U)$ , $i \in [1,n]$, а его общее решение имеет вид

$$V = \Psi(\varphi_1(\bar{x},U),\ldots,\varphi_n(\bar{x},U)). \quad (22)$$

Выражение

$$\Psi(\varphi_1(\bar{x},U),\ldots,\varphi_n(\bar{x},U)) = 0 \quad (23)$$

дает нам неявное задание $U = F(\bar{x})$ - решение уравнения(23).